О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ПОЧТИ ВСЮДУ МНОГОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

С.Дж.АЛИЕВ

Бакинский Государственный Университет

samad_aliyev @ mail.ru

Работа посвящена изучению вопроса существования решения почти всюду многомерной смешанной задачи для одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. Введено понятие решения почти всюду изучаемой смешанной задачи. После применения метода Фурье решение исходной задачи сведено к решению некоторой счётной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов Фурье искомого решения. Далее, доказана теорема существования решения почти всюду рассматриваемой смешанной задачи.

В работе изучается вопрос существования решения почти всюду следующей многомерной смешанной задачи:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} L(u(t,x)) = \text{☞}(u(t,x)) \quad (t \in [0,T], x \in \Omega), \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x) \quad (x \in \Omega),\; u_t(0,x) = \psi(x) \;\; (x \in \Omega), \tag{2}$$

$$u(t,x)\big|_{\Gamma} = 0, \tag{3}$$

где $0 < T < +\infty$; $x = (x_1, ..., x_n)$, $\Omega - n$ -мерная ограниченная область с достаточно гладкой границей S, $\Gamma = [0,T] \times S$;

$$L(u(t,x)) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_j} \right) - a(x)u(t,x), \tag{4}$$

причём функции $a_{ij}(x)$ $(i,j = \overline{1,n})$ и $a(x)$ измеримы и ограничены в Ω и в области Ω удовлетворяют условиям

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x),\; a(x) \ge 0,\; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i \xi_j \ge \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \;\; (\alpha = const > 0),$$

ξ_i - любые действительные числа; φ, ψ - заданные функции; ☞ - некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор, а $u(t,x)$ - искомая функция.

При исследовании решения почти всюду задачи (1)-(3) будем пользоваться приводимыми ниже классами функций $\overset{\circ}{W}$ и $\overset{\circ}{W}_1$, введёнными К.Фридрихсом.

Замыкание множества всех непрерывно дифференцируемых финитных в Ω функций в норме $W_2^1(\Omega)$ назовём классом $\overset{\circ}{W}(\Omega)$. Очевидно, что $\overset{\circ}{W}(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$.

Обозначим через $\dot{W}_1(Q_T)$ $(Q_T \equiv [0,T] \times \Omega)$ совокупность всех непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю в δ-окрестности боковой поверхности цилиндра Q_T, имеющей вид: $Q_{T,\delta} = [0,T] \times \Omega_\delta$, где Ω_δ есть совокупность точек Ω, удалённых от границы Ω на расстояние, не больше δ. Замыкание $\dot{W}_1(Q_T)$ в норме $W_2^1(Q_T)$ обозначим $\overset{\circ}{W}_1(Q_T)$. Очевидно, что $\overset{\circ}{W}_1(Q_T) \subset W_2^1(Q_T)$.

Определение. Решением почти всюду задачи (1)-(3) назовём функцию $u(t,x) \in \overset{\circ}{W}_1(Q_T)$, принадлежащую пространству $L_2(Q_T)$ вместе со всеми своими производными $u_t(t,x), u_{x_i}(t,x)$ $(i=\overline{1,n})$, $u_{tx_i}(t,x)$ $(i=\overline{1,n})$, $u_{x_i x_j}(t,x)$ $(i,j=\overline{1,n})$, $u_{tt}(t,x)$, $u_{tx_i x_j}(t,x)$ $(i,j=\overline{1,n})$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в Q_T и принимающую начальные значения (2) почти всюду в Ω.

Вспомогательные факты

С целью исследования решения почти всюду задачи (1)-(3) приведём некоторые известные факты и установим ряд новых вспомогательных фактов.

1. Как известно, оператор L, порождённый дифференциальным выражением (4) и краевым условием (3), имеет счётную систему отрицательных собственных чисел

$$0 > -\lambda_1^2 \geq -\lambda_2^2 \geq \ldots \geq -\lambda_s^2 \geq \ldots \quad (0 < \lambda_s \to +\infty \text{ при } s \to \infty)$$

и соответствующую полную ортонормированную в $L_2(\Omega)$ систему обобщённых собственных функций $\vartheta_s(x)$, причём под обобщённой собственной функцией $\vartheta_s(x)$ оператора L понимаем такую не равную тождественно нулю функцию $\vartheta_s(x)$, которая принадлежит классу $\overset{\circ}{W}(\Omega)$ и для любой функции $\Phi(x)$ из $\overset{\circ}{W}(\Omega)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \vartheta_s(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_j} + a(x)\vartheta_s(x)\Phi(x) \right\} dx = \lambda_s^2 \int_\Omega \vartheta_s(x)\Phi(x)\,dx .$$

Очевидно, что каждое решение почти всюду задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(t,x) = \sum_{s=1}^\infty u_s(t)\vartheta_s(x), \tag{5}$$

где $u_s(t) = \int\limits_{\Omega} u(t,x) ❖_s(x)dx \quad (s = 1,2,...)$. Тогда, после применения формальной схемы метода Фурье, нахождение коэффициентов Фурье $u_s(t)$ искомого решения почти всюду $u(t,x)$ задачи (1)-(3) сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$u_s(t) = \varphi_s + \frac{1}{\lambda_s^2}\left(1 - e^{-\lambda_s^2 t}\right)\psi_s +$$

$$+\frac{1}{\lambda_s^2}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} ☞(u(\tau,x)) \cdot \left[1 - e^{-\lambda_s^2(t-\tau)}\right] \cdot ❖_s(x)dxd\tau \;\left(s = 1,2,...; t \in [0,T]\right), \quad (6)$$

где

$$\varphi_s = \int\limits_{\Omega} \varphi(x) ❖_s(x)dx, \qquad \psi_s = \int\limits_{\Omega} \psi(x) ❖_s(x)dx.$$

2. Исходя из определения решения почти всюду задачи (1)-(3), легко доказывается следующая

Лемма. Если $u(t,x)$ является решением почти всюду задачи (1)-(3) и обобщённые производные $\frac{\partial}{\partial x_k} a_{ij}(x) \; (i,j,k = \overline{1,n})$ ограничены в Ω, то функции $u_s(t) \;\; (s = 1,2,...)$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (6).

3. Обозначим через $B^{\alpha_0,...,\alpha_l}_{\beta_0,...,\beta_l,T}$ совокупность всех функций $u(t,x)$ вида (5), рассматриваемых в $[0,T] \times \Omega$, для которых все функции $u_s(t) \in C^{(l)}([0,T])$ и

$$J_T(u) \equiv \sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \le t \le T}\left|u_s^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}} < +\infty,$$

где $\alpha_i \ge 0, \;\; 1 \le \beta_i \le 2 \;\; \left(i = \overline{0,l}\right)$. Норму в этом множестве определим так: $\|u\| = J_T(u)$. Очевидно ([1]), что все эти пространства банаховы.

В дальнейшем для функций $u(t,x) \in B^{\alpha_0,...,\alpha_l}_{\beta_0,...,\beta_l,T}$ будем пользоваться обозначениями:

$$\|u\|_{B^{\alpha_0,...,\alpha_l}_{\beta_0,...,\beta_l,t}} \equiv \sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s^{\alpha_i} \cdot \max_{0 \le \tau \le t}\left|u_s^{(i)}(\tau)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}} \qquad (t \in [0,T]).$$

4. В заключение параграфа условимся всюду в этой работе считать все величины вещественными, все функции действительнозначными, а интегралы всюду понимать в смысле Лебега.

Исследование существования решения почти всюду задачи (1)-(3)

В этом параграфе доказывается теорема существования решения почти всюду задачи (1)-(3).

Сначала примем следующие обозначения:

$$H(u(t,x),V(t,x)) \equiv \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_j} + a(x) u(t,x) V(t,x) \right] dx \,,$$

$$H(u(t,x),u(t,x)) \equiv H(u(t,x)) = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_j} + a(x) u^2(t,x) \right] dx \,.$$

Тогда очевидно, что для любого s $(s = 1,2,...)$

$$H\left(\frac{v_s(x)}{\lambda_s} \right) = \frac{1}{\lambda_s^2} \cdot H(v_s(x)) = 1 \,.$$

Так как для любого натурального числа N

$$0 \le H\left(z(t,x) - \sum_{s=1}^{N} H\left(z(t,x), \frac{1}{\lambda_s} v_s(x)\right) \cdot \frac{v_s(x)}{\lambda_s} \right) = H(z(t,x)) - 2\sum_{s=1}^{N} \left[H\left(z(t,x), \frac{1}{\lambda_s} v_s(x)\right) \right]^2 +$$

$$+ \sum_{s=1}^{N} \left[H\left(z(t,x), \frac{1}{\lambda_s} v_s(x)\right) \right]^2 \cdot H\left(\frac{v_s(x)}{\lambda_s} \right) = H(z(t,x)) - \sum_{s=1}^{N} \left[H\left(z(t,x), \frac{1}{\lambda_s} v_s(x)\right) \right]^2 ,$$

то

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left[H\left(z(t,x), \frac{1}{\lambda_s} v_s(x)\right) \right]^2 \le H(z(t,x)) \,. \tag{7}$$

Аналогично (7) доказывается справедливость следующего неравенства:

$$\sum_{s=1}^{\infty} (\lambda_s \psi_s)^2 \le H(\psi(x), \psi(x)) \,. \tag{8}$$

Теорема. Пусть

1. $a_{ij}(x) \in C^{(2)}(\overline{\Omega})$ $(i,j = \overline{1,n})$; $a(x) \in C^{(1)}(\overline{\Omega})$; $S \in C^3$; собственные функции $v_s(x)$ оператора L при граничном условии $v_s(x)\big|_S = 0$ трижды непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$; $\varphi(x) \in W_2^3(\Omega)$, $\varphi(x), L\varphi(x) \in \overset{\circ}{H}(\Omega)$; $\psi(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}(\Omega)$.
2. Оператор F действует из шара $K\left(\| u - W \|_{B_{2,T}^1} \le R \right)$ в $L_2(Q_T)$ непрерывно и ограниченно, где $0 < R < +\infty$,

$$W(t,x) \equiv \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \varphi_s + \frac{1}{\lambda_s^2} \left[1 - e^{-\lambda_s^2 t} \right] \psi_s \right\} \cdot v_s(x) \,.$$

3. $\dfrac{\sqrt{T}}{\lambda_1^2} \cdot \sup\limits_{u \in K} \left\{ \| F(u) \|_{L_2(Q_T)} \right\} \le R \,.$

4. Для каждого $u \in \text{👆}_1(Q_T)$ $\quad$ $\text{☞}(u) \in \text{👆}_1(Q_T)$ **.**

Тогда задача (1)-(3) имеет решение почти всюду.

Доказательство. Сначала примем следующие обозначения:

$$\text{⚐}(u(t,x)) \equiv \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_s^2} \int_0^t \int_\Omega u(\tau,\xi)\, \text{❖}_s(\xi) \cdot \left[1 - e^{-\lambda_s^2 (t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau \cdot \text{❖}_s(x), \tag{9}$$

$$Q(u(t,x)) \equiv W(t,x) + \text{⚐☜}(u(t,x)). \tag{10}$$

Из условия 1 данной теоремы следует, что $W(t,x) \in B^1_{2,T}$. Если для каждого $u(t,x) \in$ ☹ обозначить

$$\text{⚐☜}(u(t,x)) = \sum_{s=1}^{\infty} \widetilde{u}_s(t)\, \text{❖}_s(x),$$

где

$$\widetilde{u}_s(t) = \frac{1}{\lambda_s^2} \int_0^t \int_\Omega \text{☞}(u(\tau,\xi))\, \text{❖}_s(\xi) \cdot \left[1 - e^{-\lambda_s^2 (t-\tau)}\right] d\xi\, d\tau,$$

то легко получить, что для любых натуральных s, N и для любых $u \in$ ☹, $t \in [0,T]$:

$$\left|\widetilde{u}_s(t)\right| \le \frac{1}{\lambda_s^2} \cdot \sqrt{T} \cdot a_0, \qquad \left|u_s'(t)\right| \le \sqrt{T} \cdot a_0, \tag{11}$$

$$\left\{ \sum_{s=N}^{\infty} \left(\lambda_s \cdot \max_{0 \le t \le T} \left|\widetilde{u}_s(t)\right| \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \le \frac{\sqrt{T}}{\lambda_N^2} \cdot \left\{ \int_0^T \int_\Omega [\text{☞}(u(t,x))]^2\, dx dt \right\}^{\frac{1}{2}} \le \frac{\sqrt{T}}{\lambda_N^2} \cdot a_0, \tag{12}$$

где

$$a_0 \equiv \sup_{u \in \text{☹}} \left\{ \left\| \text{☞}(u) \right\|_{L_2(Q_T)} \right\}.$$

Из соотношений (11) и (12), в силу теоремы 1.8 (см. [1], стр.13) о критерии компактности множеств в пространствах $B^{\alpha_0,\ldots,\alpha_l}_{\beta_0,\ldots,\beta_l,T}$, следует компактность множества ⚐☞ в $B^1_{2,T}$.

Далее, для любых u, ❖ ☹ имеем:

$$\left\| Q(u) - W \right\|_{B^1_{2,T}} \le \frac{\sqrt{T}}{\lambda_1^2} \cdot \left\| \text{☞}(u) \right\|_{L_2(Q_T)} \le \frac{\sqrt{T}}{\lambda_1^2} \cdot a_0 \le R, \tag{13}$$

$$\left\| Q(u) - Q(\text{❖}) \right\|_{B^1_{2,T}} \le \frac{\sqrt{T}}{\lambda_1^2} \cdot \left\| \text{☞}(u) - \text{☞}(\text{❖}) \right\|_{L_2(Q_T)}, \tag{14}$$

где оператор Q определён соотношением (10).

Из (13) видно, что оператор Q преобразует шар ☹ в себя, а из (14) следует непрерывность оператора Q в шаре ☹. Таким образом, оператор Q

вполне непрерывно преобразует шар ☺ в себя. Следовательно, в силу принципа Шаудера, оператор Q имеет в шаре ☺ $\subset B^1_{2,T}$ по крайней мере одну неподвижную точку $u(t,x)$. По определению оператора Q:

$$u = Q(u).$$

Из (9) и (10) видно, что $u_s(t) = \int\limits_{\Omega} u(t,x)$ ❖$_s(x)dx$, т.е. коэффициенты Фурье функции $u(t,x)$ по системе $\{$❖$_s(x)\}_{s=1}^{\infty}$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (6). Пользуясь этим, покажем, что найденная функция $u(t,x) = \sum\limits_{s=1}^{\infty} u_s(t)$ ❖$_s(x)$ является решением почти всюду задачи (1)-(3). Легко показать, что $u(t,x) \in$ ☟$_1(Q_T)$. Тогда, в силу условия 4 данной теоремы, ☞$(u(t,x)) \in$ $\in$ ☟$_1(Q_T)$. Пользуясь этим и соотношением L❖$_s(x) = -\lambda_s^2$❖$_s(x)$ преобразуем (интегрируя по частям) систему (6) к следующему виду:

$$u_s(t) = \varphi_s + \frac{1}{\lambda_s^2}(1 - e^{-\lambda_s^2 t})\psi_s + \frac{1}{\lambda_s^3}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}☞(u(\tau,x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{❖_s(x)}{\lambda_s}\right) + \right.$$

$$\left. + a(x)☞(u(\tau,x)) \cdot \frac{❖_s(x)}{\lambda_s}\right] \cdot [1 - e^{-\lambda_s^2(t-\tau)}]dxd\tau,\ s = 1,2,...;\ t \in [0,T]. \qquad (15)$$

Из (15), пользуясь неравенствами (8) (для функций $\psi(x), L\varphi(x)$) и (7) (для функции $z(t,x) =$ ☞$(u(t,x))$), получаем:

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s^3 \cdot \max_{0\le t\le T}|u_s(t)|\right)^2 \le 3 \cdot \left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s^3 \cdot \varphi_s\right)^2 + \sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s \cdot \psi_s\right)^2 + T \cdot \int\limits_0^T\sum_{s=1}^{\infty}\left(\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \times \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times \frac{\partial ☞(u(\tau,x))}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{❖_s(x)}{\lambda_s}\right) + a(x)☞(u(\tau,x)) \cdot \frac{❖_s(x)}{\lambda_s}\right]dx\right)^2 d\tau\right\} \le$$

$$\le 3 \cdot \left\{☟(L\varphi(x), L\varphi(x)) + ☟(\psi(x),\psi(x)) \ + \ T \cdot \int\limits_0^T\sum_{s=1}^{\infty}\left[☟\left(☞(u(\tau,x)), \frac{❖_s(x)}{\lambda_s}\right)\right]^2 d\tau\right\} \le$$

$$\le 3 \cdot \left\{\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial L\varphi(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial L\varphi(x)}{\partial x_j} + a(x)(L\varphi(x))^2\right]dx + \right.$$

$$+ \int\limits_{\Omega}\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j} + a(x)\psi^2(x)\right]dx + T \cdot \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \cdot \frac{\partial ☞(u(\tau,x))}{\partial x_i} \cdot\right.$$

$$\cdot\frac{\partial \text{☞}(u(\tau,x))}{\partial x_j}+a(x)(\text{☞}(u(\tau,x)))^2\Bigg]dxd\tau\Bigg\}\ , \qquad (16)$$

$$\sum_{s=1}^{\infty}\Big(\lambda_s^2\cdot\max_{0\le t\le T}|u_s'(t)|\Big)^2\le 2\cdot\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\big(\lambda_s^2\cdot\psi_s\big)^2+\frac{1}{2}\int_0^T\sum_{s=1}^{\infty}\left(\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\cdot\frac{\partial \text{☞}(u(\tau,x))}{\partial x_i}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\text{❖}_s(x)}{\lambda_s}\right)+a(x)\text{☞}(u(\tau,x))\cdot\frac{\text{❖}_s(x)}{\lambda_s}\right]dx\right)^2d\tau\right\}\le 2\cdot\left\|\{L\psi(x)\}\right\|^2_{L_2(\Omega)}+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\int_0^T\sum_{s=1}^{\infty}\left[\text{☟}\left(\text{☞}(u(\tau,x)),\frac{\text{❖}_s(x)}{\lambda_s}\right)\right]^2d\tau\Bigg\}\le 2\cdot\left\{\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\cdot\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j}\right)-a(x)\psi(x)\right]^2dx+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega\left[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\cdot\frac{\partial \text{☞}(u(\tau,x))}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \text{☞}(u(\tau,x))}{\partial x_j}+a(x)(\text{☞}(u(\tau,x)))^2\right]dxd\tau\right\}. \qquad (17)$$

Таким образом, из (16) и (17) следует, что $u(t,x)\in B^{3,2}_{2,2,T}$.

Примем следующие обозначения:

$$u_{p,q}(t,x)=\sum_{s=p}^{q}u_s(t)\,\text{❖}_s(x) \qquad (1\le p\le q).$$

Теперь, пользуясь неравенством (1.11) (для $k=0,1,2,3$) и неравенством (1.13) (для $r=1$) из [1](см. стр.12), получаем, что для любых $t\in[0,T]$ и $1\le p\le q$:

$$\left\|u_{p,q}(t,x)\right\|^2_{W_2^3(\Omega)}\le C_1\cdot\{J_0(u_{p,q})+J_1(u_{p,q})+J_2(u_{p,q})+J_3(u_{p,q})\}\le$$

$$\le C_2\cdot\{J_0(u_{p,q})+J_0(Lu_{p,q})+J_1(u_{p,q})+J_1(Lu_{p,q})\}=C_2\cdot\left\{\int_\Omega u^2_{p,q}(t,x)dx+\right.$$

$$+\int_\Omega(Lu_{p,q}(t,x))^2dx+\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial u_{p,q}(t,x)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u_{p,q}(t,x)}{\partial x_j}dx+\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\times$$

$$\left.\times\frac{\partial Lu_{p,q}(t,x)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial Lu_{p,q}(t,x)}{\partial x_j}dx\right\}\le C_2\cdot\left\{\sum_{s=p}^{q}u_s^2(t)+\sum_{s=p}^{q}(\lambda_s^2\cdot u_s(t))^2+\sum_{s=p}^{q}\lambda_s^2\cdot u_s^2(t)+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=p}^{q}(\lambda_s^3\cdot u_s(t))^2\right\}\le C_2\cdot\left\{\frac{1}{\lambda_1^6}+\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_1^4}+1\right\}\cdot\sum_{s=p}^{q}\Big(\lambda_s^3\cdot\max_{0\le t\le T}|u_s(t)|\Big)^2, \qquad (18)$$

где $C_1>0,\ C_2>0$ - некоторые постоянные числа.

Из (18), в силу сходимости числового ряда $\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s^3 \cdot \max_{0\le t\le T}\left|u_s(t)\right|\right)^2$, следует, что $\left\|u_{p,q}(t,x)\right\|_{W_2^3(\Omega)} \to 0$ равномерно по $t\in[0,T]$ при $p,q\to+\infty$. Следовательно, ряд

$$u(t,x)=\sum_{s=1}^{\infty}u_s(t)\,\text{❖}_s(x)$$

и ряды, полученные его почленным дифференцированием по $x_1,\dots,x_n$ три раза, сходятся в $L_2(\Omega)$ равномерно относительно $t\in[0,T]$.

Далее, пользуясь неравенством (1.11) (для $k=0,1,2$) и неравенством (1.12) (для $r=1$) из [1] (см. стр.12), получаем, что для любых $t\in[0,T]$ и $1\le p\le q$:

$$\left\|\frac{\partial u_{p,q}(t,x)}{\partial t}\right\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \le C_3\cdot\left\{J_0\left(\frac{\partial u_{p,q}}{\partial t}\right)+J_1\left(\frac{\partial u_{p,q}}{\partial t}\right)+J_2\left(\frac{\partial u_{p,q}}{\partial t}\right)\right\}\le C_4\cdot\left\{J_0\left(\frac{\partial u_{p,q}}{\partial t}\right)+\right.$$

$$\left.+J_0\left(L\left(\frac{\partial u_{p,q}}{\partial t}\right)\right)+J_1\left(\frac{\partial u_{p,q}}{\partial t}\right)\right\}\le C_4\cdot\left\{\sum_{s=p}^{q}\left(u_s'(t)\right)^2+\sum_{s=p}^{q}(\lambda_s^2\cdot u_s'(t))^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=p}^{q}\left(\lambda_s\cdot u_s'(t)\right)^2\right\}\le C_4\cdot\left\{\frac{1}{\lambda_1^4}+1+\frac{1}{\lambda_1^2}\right\}\cdot\sum_{s=p}^{q}\left(\lambda_s^2\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_s'(t)\right|\right)^2, \qquad (19)$$

где $C_3>0,\ C_4>0$ - некоторые постоянные числа.

Из (19), в силу сходимости числового ряда $\sum_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s^2\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_s'(t)\right|\right)^2$, следует, что $\left\|\frac{\partial u_{p,q}(t,x)}{\partial t}\right\|_{W_2^2(\Omega)} \to 0$ равномерно по $t\in[0,T]$ при $p,q\to+\infty$. Следовательно, ряд

$$u_t(t,x)=\sum_{s=1}^{\infty}u_s'(t)\,\text{❖}_s(x)$$

и ряды, полученные его почленным дифференцированием по $x_1,\dots,x_n$ два раза, сходятся в $L_2(\Omega)$ равномерно относительно $t\in[0,T]$.

Как видно из оценок (18) и (19):

$$u(t,x)\in C\left([0,T];W_2^3(\Omega)\right),\ \ u_t(t,x)\in C\left([0,T];W_2^2(\Omega)\right).$$

Далее, из системы (6) легко получить, что $\forall t\in[0,T]$ и натурального N, почти всюду в Ω:

$$\frac{\partial^2 u_N(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}(L(u_N(t,x)) = \sum_{s=1}^{N} \left(\int_{\Omega} \text{☞}(u(t,\xi)) \text{❖}_s(\xi) d\xi \right) \cdot \text{❖}_s(x), \qquad (20)$$

где $u_N(t,x) = \sum_{s=1}^{N} u_s(t) \text{❖}_s(x)$. Так как $\forall t \in [0,T]$ $\text{☞}(u(t,x)) \in L_2(\Omega)$, то перейдя к пределу по метрике $L_2(\Omega)$ в обеих частях (20), получаем, что $\forall t \in [0,T]$ почти всюду в Ω:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}(L(u(t,x)) = \text{☞}(u(t,x)).$$

Отсюда следует, что $u_{tt}(t,x) \in L_2(Q_T)$ и функция $u(t,x)$ удовлетворяет почти всюду в Q_T уравнению (1). А начальные условия (2) удовлетворяются в ещё более сильном смысле, а именно:

$$\|u(t,x) - \varphi(x)\|_{W_2^3(\Omega)} \to 0, \quad \|u_t(t,x) - \psi(x)\|_{W_2^2(\Omega)} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +0.$$

Таким образом, функция $u(t,x)$ является решением почти всюду задачи (1)-(3). Теорема доказана.

Замечание. В заключение отметим, что данная работа является продолжением работы [2], в которой изучена единственность (в целом) решения почти всюду задачи (1)-(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Xudaverdiyev K.İ. Qeyri-xətti hiperbolik tənliklər üçün qoyulmuş çoxölçülü qarışıq məsələ. Bakı: ADU nəşriyyatı, 1987, 88 s.
2. Алиев С.Дж. О единственности решения почти всюду многомерной смешанной задачи для одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью // Вестник БГУ, серия физ.-мат.наук, 2009, №4, с.31-36.

SAĞ TƏRƏFİ QEYRİ-XƏTTİ OPERATOR OLAN BİR SİNİF ÜÇÜNCÜ TƏRTİB DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN ÇOXÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN SANKİ HƏR YERDƏ HƏLLİNİN VARLIĞI HAQQINDA

S.C.ƏLİYEV

XÜLASƏ

İş sağ tərəfi qeyri-xətti operator olan bir sinif üçüncü tərtib diferensial tənliklər üçün çoxölçülü qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinin varlığı məsələsinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. Öyrənilən qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinə tərif verilir. Furye metodunu tətbiq etdikdən sonra baxılan məsələnin həlli axtarılan həllin naməlum Furye əmsallarına nəzərən müəyyən hesabi qeyri-xətti inteqro-diferensial tənliklər sisteminin həllinə gətirilir. Nəticədə baxılan qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinin varlığı haqqında teorem isbat edilmişdir.

EXISTENCE OF AN ALMOST EVERYWHERE SOLUTION OF MULTI-DIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR ONE CLASS THIRD ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NON-LINEAR OPERATOR IN THE RIGHT-HAND SIDE

S.J.ALIYEV

SUMMARY

This work is dedicated to the study of existence of almost everywhere solution of multi-dimensional mixed problem for one class third order differential equations with non-linear operator in the right-hand side. The conception of almost everywhere solution for the mixed problem under consideration is introduced. After applying Fourier method, the solution of the original problem is reduced to the solution of some countable system of non-linear integro-differential equations in unknown Fourier coefficients of the sought solution. Besides, the existence theorem of almost everywhere solution of original problem is proved.